

负刚度非线性系统的回复力曲面参数辨识方法

胡方圆, 刘清华, 曹军义, 张颖

(西安交通大学现代设计及转子轴承系统教育部重点实验室, 710049, 西安)

摘要: 针对负刚度非线性振子回复力的辨识困难问题, 提出了一种基于回复力曲面的时域非参数辨识方法。对比分析了位移微分和加速度积分的数值处理方法, 给出了利用实验数据绘制 4 种典型负刚度振子三维回复力曲面图及提取刚度力和阻尼力的方法。研究表明: 对 4 种负刚度振子的数值模拟, 多项式刚度力和阻尼力系数的辨识精度都可达 95% 以上。通过搭建实验平台对不同加速度水平下的多稳态振子进行了扫频实验, 并基于设计方法建立了多稳态振子的回复力表面, 表面识别结果与实测回复力面吻合较好, 验证了回复力曲面法辨识负刚度非线性振子的有效性。该研究为能量俘获及振动控制领域的非线性研究提供了一种可行的方法。

关键词: 负刚度振子; 非线性回复力; 回复力曲面

中图分类号: TH39 **文献标志码:** A

DOI: 10.7652/xjtuxb202104011 **文章编号:** 0253-987X(2021)04-0095-12



OSID 码

Restoring Force Surface-Based Parameter Identification Method for Negative Stiffness Nonlinear System

HU Fangyuan, LIU Qinghua, CAO Junyi, ZHANG Ying

(Key Laboratory of Education Ministry for Modern Design and Rotor-Bearing System,

Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

Abstract: Aiming at the difficulty in identifying the restoring force of a nonlinear oscillator with negative stiffness, a time-domain nonparametric identification method based on restoring force surface is proposed. The numerical processing schemes of displacement differentiation and acceleration integration are compared and analyzed. A method for drawing three-dimensional restoring force surface diagrams of four typical negative stiffness oscillators and extracting stiffness and damping restoring forces by experimental data is given. This approach shows that the identification accuracy of the polynomial stiffness force and the damping force coefficient can reach more than 95% in the numerical simulation of the four negative stiffness vibrators. Frequency sweep experiment is carried out on the multi-stable oscillators at different acceleration levels by building an experimental platform. Following the designing idea, the restoring force surface of the multi-stable state vibrator is constructed. The surface recognition result coincides with the measured restoring force surface, which verifies the effectiveness of the complex force surface method in identifying the negative stiffness nonlinear oscillators, and this method is also applicable to the nonlinear analysis in the fields of energy harvesting and vibration control.

Keywords: negative stiffness oscillator; nonlinear restoring force; restoring force surface

近几年,负刚度结构成为了振动控制和能量俘获领域的研究热点^[1]。随着高精密领域对振动控制的要求逐渐提高,许多学者把负刚度装置运用到隔振和能量俘获领域中,并取得了显著效果。其中,系统非线性回复力最直接反映系统的非线性特性,对系统的动力学特性的研究有很大价值。目前,国内外学者获取负刚度隔振器或俘能器等强非线性系统的非线性回复力,通常基于解析计算^[2-3]、磁场仿真^[4-5]或测量^[6-7],再利用哈密顿原理进行系统的力学方程正向建模。此方法计算繁琐、精度不高且仅适用于理想的装配环境,尤其是会受到实验平台搭建后装配条件影响,导致了非线性回复力很难精确表征。

因此,基于实验测量的输入、输出数据进行非线性回复力(NRF)的逆向建模十分必要。Malatkar等利用频谱分析辨识含立方刚度与平方刚度的非线性悬臂板系统^[8];Vakakis等通过波特图及奈奎斯特图区分刚度非线性和阻尼非线性^[9];Chatterjee等利用Volterra级数实现多项式非线性类别辨识^[10];Bendat等用回复力曲面(RFS)直观地判断机械系统中常见的几种单自由度非线性特征^[11];Gondhalekar等建立了非线性频域回复力曲线库,实现了单自由度和多自由系统非线性类别辨识^[12];Marchesiello等提出了一种子空间辨识算法来辨识三次刚度和间隙性非线性振子的回复力^[13]。

非参数辨识法无需预先确定NRF的形式,在系统辨识的过程中得到广泛的应用。Anastasio等利用实验RFS来描述双稳态振子的刚度和阻尼力^[14]。Feldman和Cohen等提出一种基于非平稳信号振动分解的希尔伯特变换识别方法,用于识别双稳态电磁能量俘获装置的NRF^[15-16]。但是,这些方法在只能从实验中得到位移数据的情况下对噪声很敏感,难以获得非稳态点附近的刚度力和保证辨识精度。

RFS法是直接利用实验手段获得系统模型中的参数,无需事先确定NRF形式的纯粹时域非参数辨识方法。通过滤波或数据前处理可以减少噪声干扰,构造出真实的三维力-速度-位移曲面,可直观地分析出系统的非线性特性。该方法最初由Masri和Caughey^[17-18]提出,并经Crawley等^[19]加以发展和利用。其中,Kerschen等用RFS法实现了VTT Benchmark系统刚度曲线和阻尼曲线的识别研究^[20]。Sun等利用RFS法识别螺栓组合梁结合部的刚度及阻尼特性参数^[21]。Anastasio等基于RFS

法成功解决了负刚度隔振器中摩擦的非线性辨识问题,辨识出系统的刚度回复力和阻尼回复力^[22]。Worden等用RFS法识别在仿真计算和实验两种情况下分段线性的悬臂梁刚度^[23],理论和实验结果吻合较好。事实证明,RFS法可以很好地解决没有确切解析表达式的非线性系统辨识问题。

RFS法的关键是需要通过实验测量同时得到加速度、速度和位移。然而,由于实验噪声或者对实验数据的积分和微分处理不恰当会导致相位失真,从而导致回复力面杂乱,拟合出的系统参数出现较大的辨识误差。为解决这个问题,需要选择有效的数据处理方法,Worden等针对地震数据,对RFS法中积分和微分两种数据处理方法进行评估及优缺点的对比^[24]。Jiang等将RFS法应用于颗粒阻尼器的研究,选择数值积分作为数据前处理的方法^[25]。但是,以上研究都对测得的加速度信号进行数值积分,会出现干扰趋势项使信号偏移,而数值微分可以有效避免这种情况出现。目前,基于对测量位移进行微分处理且用于多稳态负刚度振子回复力辨识的RFS法还未做过系统研究。

本文基于RFS法,提出一种负刚度系统非线性回复力的辨识方法。首先提出4种不同磁力耦合多稳态负刚度振子回复力的构造方法,基于RFS法的辨识原理,对比研究位移微分和加速度积分的RFS数据处理方法,对4种类型多稳态振子进行仿真研究,分析刚度力和阻尼力的辨识精度。搭建实验台,对不同加速度水平下的多稳态振子进行扫频实验,建立多稳态振子的回复力模型的表面,验证RFS法对辨识负刚度非线性振子的有效性和准确性。

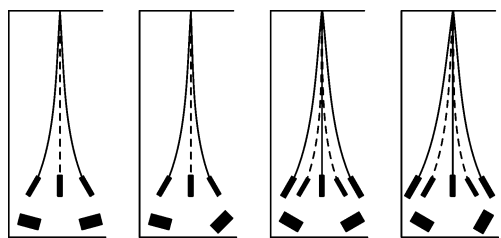
1 多稳态悬臂梁非线性回复力建模

为实现对称和非对称多稳态悬臂梁结构,通常采用外部磁铁耦合的方法^[4-5],且靠近悬臂梁末端对称布置两块可旋转磁铁。由于磁力的相互作用会改变悬臂梁的稳态特性,当两块磁铁旋转角度不一样时会形成图1所示的不对称多稳态结构。本文采用多稳态磁耦合悬臂梁进行研究分析。

实践经验表明,非线性回复力是磁场力和线性回复力共同作用产生的,则非线性回复力 F_r 表示为

$$F_r = Ku + \sum_{n=1}^p L_n k_n u^n \quad (1)$$

式中: K 为悬臂梁线的等效刚度; p 为非线性项个数; L 表示0、1或-1; k 为各非线性项系数; u 为悬臂梁末端位移。



(a)对称双稳态 (b)不对称双稳态 (c)对称三稳态 (d)不对称三稳态

图1 4种多稳态悬臂梁

Fig. 1 Four types of multistable cantilever beams

为了探究4种典型多稳态悬臂梁的回复力方程,需要这4种结构最简单的回复力表征形式。当回复力方程中 $p=3$ 时,便可以构造出双稳态悬臂梁,此时非线性回复力为

$$F_{bi} = (K + L_1 k_1)u + L_2 k_2 u^2 + L_3 k_3 u^3 \quad (2)$$

非线性势能函数包括两个稳定平衡点(势阱)和一个不稳定平衡点(势垒),其中偶次项系数决定了系统是否不对称,若为零则完全对称,该函数为回复力在位移上的积分如下

$$U_{bi} = \frac{1}{2}(K + L_1 k_1)u^2 + \frac{1}{3}L_2 k_2 u^3 + \frac{1}{4}L_3 k_3 u^4 \quad (3)$$

当回复力方程中 $p=5$ 时,非线性回复力方程为

$$F_{tri} = (K + L_1 k_1)u + L_2 k_2 u^2 + L_3 k_3 u^3 + L_4 k_4 u^4 + L_5 k_5 u^5 \quad (4)$$

非线性势能函数有3个稳定平衡点(势阱)和两个不稳定平衡点(势垒),回复力中偶数项次数决定了系统不对称,表示如下

$$U_{tri} = \frac{1}{2}(K + L_1 k_1)u^2 + \frac{1}{3}L_2 k_2 u^3 + \frac{1}{4}L_3 k_3 u^4 + \frac{1}{5}L_4 k_4 u^5 + \frac{1}{6}L_5 k_5 u^6 \quad (5)$$

实践中,不会先确定非线性回复力各项系数后再设计一个多稳态结构,这也是需要辨识的内容。但是,可以先确定稳态点位置和不稳定点位置,再选取合理的 $K + L_1 k_1$ 范围设计多稳态结构,这里定义 $K + L_1 k_1$ 为主刚度项系数。

对于双稳态结构,通常设不稳定平衡点 u_2 为零作为一个基准,其余两项非线性系数为

$$L_4 k_4 = (K + L_1 k_1)/u_1 u_3; L_2 k_2 = -L_3 k_3(u_1 + u_3) \quad (6)$$

对于三稳态结构,若将3个稳定平衡点位置 u_1, u_3, u_5 和两个不稳定平衡点位置 u_2, u_4 (u_3 通常设为0)作为基准,其余4项非线性系数可表达为

$$\left. \begin{aligned} L_5 k_5 &= (K + L_1 k_1)/u_1 u_2 u_4 u_5 \\ L_2 k_2 &= -L_5 k_5((u_1 + u_2)u_4 u_5 + (u_4 + u_5)u_1 u_2) \\ L_3 k_3 &= L_5 k_5((u_1 + u_2)(u_4 + u_5) + u_1 u_2 + u_4 u_5) \\ L_5 k_4 &= -L_5 k_5(u_1 + u_2 + u_4 + u_5) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

2 非参数辨识原理

2.1 RFS法辨识原理

RFS法是一个仅在少量系统结构信息下,利用时域信号进行系统辨识的方法。其原理是从悬臂梁的时域响应轨迹中构造出力、速度和位移的三维数据。从力-位移截面得到刚度力曲线,从力-速度截面得到阻尼力曲线,NRF的系数可以通过最小二乘拟合得到。RFS能够通过三维曲面直观地看出系统的动力学特性,真实地表征NRF。

对于一非线性单自由度系统,根据牛顿第二定理有

$$M\ddot{u}(t) + R(u, \dot{u}) = f(t) \quad (8)$$

式中: M 为悬臂梁等效质量; $u(t)$ 为悬臂梁末端横向位移; $f(t)$ 为外部输入力; $R(u, \dot{u})$ 为非线性回复力,是位移 u 及速度 $\dot{u}$ 的函数。

根据哈密顿原理,具有磁耦合的多稳态悬臂梁的集中参数模型如下

$$M\ddot{u}(t) + C\dot{u}(t) + Ku(t) + \sum_{n=1}^p L_n k_n u^n(t) = f(t) \quad (9)$$

式中: C 为悬臂梁等效黏性阻尼。实验中,磁力耦合非线性悬臂梁系统的 M 和激励 $f(t)$ 为已知量,加速度和速度可通过数值微分计算得到,那么将式(7)(8)进行变换,依据采样定理,以 Δt 为时间间隔,采样的 $t_i = (i-1)\Delta t$ 表示第 i 个采样时间点,那么在时间点 i 上有

$$R_i = R(u_i, \dot{u}_i) = f_i - M\ddot{u}_i \quad (10)$$

式中: $f_i = f(t_i)$; $u_i = u(t_i)$ 。 R_i 在每个采样时间点的值通过(10)式就都可得到,其中如果位移 u 和速度 $\dot{u}$ 也为已知量,那么在每一个时间点 $i=1, \dots, N$ 得到一个三维数值点 $(u_i, \dot{u}_i, R_i)$,通过插值绘制成象限的连续曲面,即可得到RFS。用一个二维多项式数学模型来描述这个曲面,从中分离出刚度力和阻尼力,则有

$$f(x, \dot{x}) = f_d(\dot{x}) + f_s(x) \quad (11)$$

式中: $f_s(x)$ 为刚度曲线表达式; $f_d(\dot{x})$ 为阻尼曲线表达式。为了通过RFS法分离出刚度力和阻尼力曲线,首先选择一个很小的正数 δ ,在 xoy 平面上,以 δ 为宽度选取一个平行于 x 轴并且通过原点的狭长的区域,在这个区域内,所有 $|\dot{x}| < \delta$,得到 $x \rightarrow f_s$

图形,即在 $x=0$ 的剖面曲线。提取这个区域内的所有 $(x_i, f(x_i, \dot{x}_i))$ 数据再做多项式拟合,可以得到刚度力曲线的达形式如下

$$f_s(x) = \sum_{i=0}^n c_i x^i \quad (12)$$

式中: $f_s(x)$ 等于狭长区域内 $f(x_i, \dot{x}_i)$ 的值; n 为 x 的阶数; c_i 为待求系数,依据最小二乘法,可以得到它的解的表达式如下

$$\mathbf{c} = (\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{A}_1^T \mathbf{f}_d \quad (13)$$

式中: $\mathbf{c} = (c_0, \dots, c_n)^T$ 。

同样地,利用阻尼曲线可以得到回复力曲面在 $x=0$ 处的剖面曲线。对这条曲线进行多项式拟合,可以得到阻尼力曲线的表达式如下

$$f_d(\dot{x}) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \dot{x}^i \quad (14)$$

式中: $f_d(x)$ 等于狭长区域内的 $f(x_i, \dot{x}_i)$ 的值; α_i 为待求系数,同样用最小二乘法,它的解的表达式如下

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{A}_2^T \mathbf{A}_2)^{-1} \mathbf{A}_2^T \mathbf{f}_s \quad (15)$$

其中, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_n)^T$, $\mathbf{f}_d = (f_{d1}, \dots, f_{dn})^T$, $\mathbf{f}_s =$

$$(\mathbf{f}_{s1}, \dots, \mathbf{f}_{sn})^T, \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} x_1^0 & \dots & x_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ x_N^0 & \dots & x_N^n \end{bmatrix}, \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \dot{x}_1^0 & \dots & \dot{x}_1^n \\ \vdots & & \vdots \\ \dot{x}_N^0 & \dots & \dot{x}_N^n \end{bmatrix}。$$

2.2 数据处理

RFS的关键问题是必须同时得到每个采样点的位移、速度和加速度,然而要通过实验同时测量这3个量又是不现实的,目前有多种方法来解决这个问题,其中最直接的两种方法为时域上的数值积分和数值微分。根据采样定理,做微分或者是积分运算要求时间域数据要足够多,采样的频率要足够高,所以采样频率应至少为最高频率的10倍以上。

2.2.1 时域上的数值积分 数值积分的方法有Trapezium公式、Simpson公式、Tick公式等。Trapezium公式的具体形式如下

$$y_i = y_{i-1} + \frac{\Delta t}{2} (y'_i + y'_{i-1}) \quad (16)$$

式中: y'_i 表示 y_i 的一阶导数。用积分公式来做加速度 $\ddot{x}$ 的数值积分,那么得到的结果每一步都会引入一个积分常数

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= \int \ddot{x}(t) dt + A \\ x(t) &= \int \dot{x}(t) dt + At + B \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

式中: A, B 都为常数。

Simpson公式如下

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{\Delta t}{3} (y'_{i+1} + 4y'_i + y'_{i-1}) \quad (18)$$

Tick公式如下

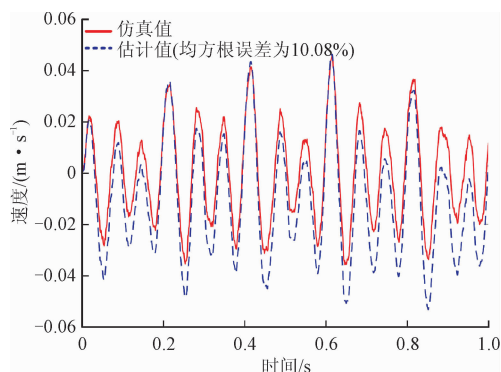
$$y_{i+1} = y_{i-1} + \Delta t (0.385 4y'_{i+1} + 1.283 2y'_i + 0.385 4y'_{i-1}) \quad (19)$$

因为在计算积分达到相同精度的情况下, Trapezium公式计算量少,计算过程简单,计算速度更快。所以本文用Trapezium公式对一个微分方程的实例进行验证

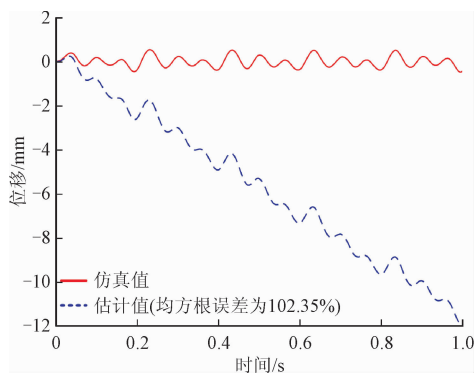
$$\ddot{x} + 35\dot{x} + 11\,000x = p(t) \quad (20)$$

令 $p(t)$ 取 $0 \sim 100$ Hz 带宽的随机噪声,时间步长取 0.001 s,用四阶龙格库塔法进行仿真计算,得到位移 u 、速度 $\dot{u}$ 、加速度 $\ddot{u}$ 的值。由于龙格库塔法在高频率下不稳定,因此在输入端使用了一个低通巴特沃斯滤波器来产生 $0 \sim 200$ Hz 的信号。

然后用Trapezium公式对加速度 $\ddot{x}$ 进行两次积分计算,得到如图2所示速度和位移的估计值。从图2a可以看出,速度真实值和估计值之间的均方根误差为 10.08% ,是式(17)中差量 A 造成的。从



(a)速度



(b)位移

图2 真实值和积分结果对比

Fig. 2 Comparison between real value and differential result

图 2b 上可以更清楚的看到,位移的真实值和估计值之间的均方根误差为 102.35%,是由差量 $At+B$ 造成的,绘制的回复力曲面如图 3 所示。由此推断系统是线性的显然是不可能的。从结果可以看出,积分结果具有很大的趋势项,不能满足计算要求的,需要将趋势项移除。若假设 $\dot{x}(t)$ 、 $x(t)$ 序列的平均值都为 0,那么可以从 $\dot{x}(t)$ 序列中减掉平均值,然后再从 $x(t)$ 序列中减掉用最小二乘法拟合出的直线。

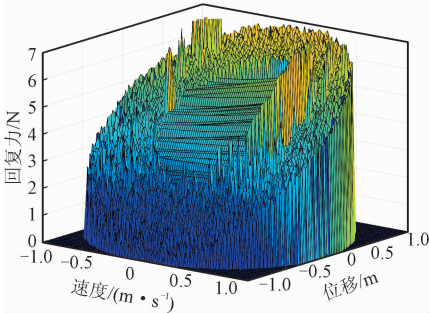


图 3 时域数值积分下得到的回复力曲面
Fig. 3 The restoring force surface obtained by numerical integration in time domain

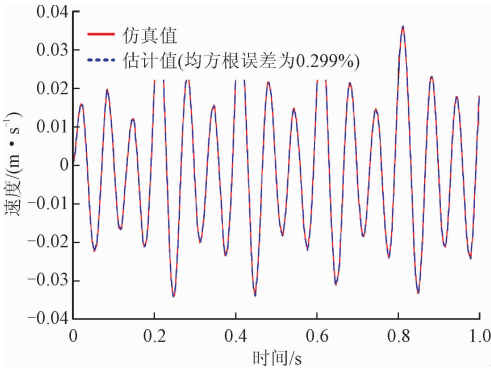
仍用上文中的例子,再次利用 Trapezium 公式进行两次积分运算,得到速度和位移的真实值与估计值,如图 4 所示。这时,速度真实值和估计值之间的均方根误差为 0.278 9%,而位移的真实值和估计值之间的均方根误差为 6.322 4%。从图 5 可以看出系统是线性的,尤其是位移的真实值和积分值的比较,移除趋势项后的估计值准确性提高了很多。

2.2.2 时域上的数值微分 实验中,如果得到的是位移信号或者是速度信号,那么就要对其做数值微分计算。数值微分计算有多种公式,这里介绍 3、5、7 数值点微分公式。3 数值点微分公式

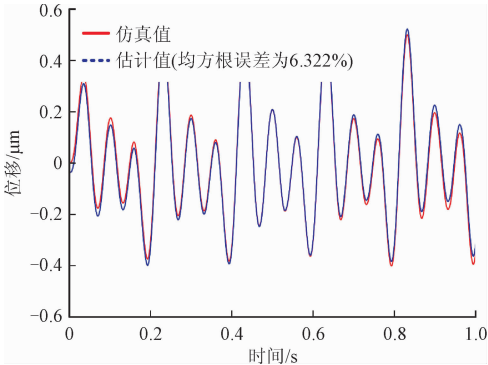
$$\dot{y}_i = (y_{i+1} - y_{i-1}) / 2\Delta t \tag{21}$$

5 数值点微分公式

$$\dot{y}_i = [(-y_{i+2} + y_{i-2} + 8(y_{i+1} - y_{i-1}))] / 2\Delta t \tag{22}$$



(a)速度



(b)位移

图 4 去趋势项后真实值和积分结果对比图
Fig. 4 Comparison graph of real value and integration result after removing trend term

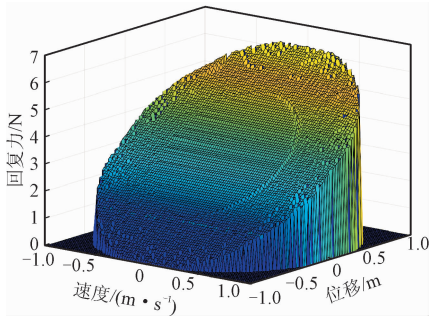
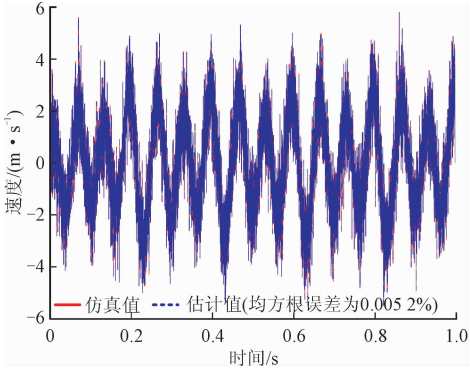


图 5 去趋势项后时域数值积分下得到的回复力曲面
Fig. 5 The restoring force surface obtained by numerical integration in time domain after deleting trend part

7 数值点微分公式

$$\dot{y}_i = [2(y_{i+3} - y_{i-3}) - 13(y_{i+2} - y_{i-2}) + 50(y_{i+1} - y_{i-1})] / 60\Delta t \tag{23}$$

因为 7 数值点微分公式计算精度高且稳定,本文用 7 数值点微分公式做验证。依然用前一节的例子,对位移 $x(t)$ 做两次微分,得到速度 $\dot{x}(t)$ 和加速度 $\ddot{x}(t)$,并分别做速度 $\dot{x}(t)$ 和加速度 $\ddot{x}(t)$ 的积分并与真实值比较,如图 6 所示。其中,速度的真实值和估计值之间的均方根误差 0.005 2%,加速度的真实



(a)速度

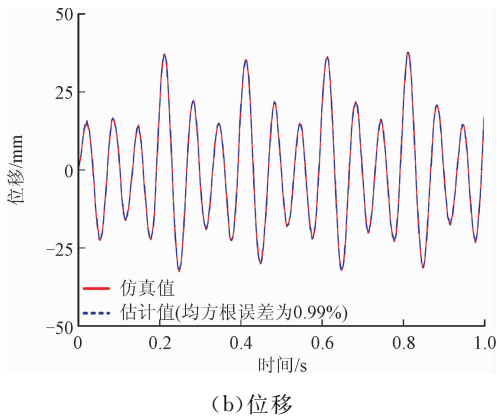


图 6 真实值和微分结果对比

Fig. 6 Comparison between real value and differential result

值和估计值之间的均方根误差 0.99%，估计值均有较高的精确度。从绘制的回复力曲面图 7 可直接看出系统是线性的。

因为时域积分对测得的加速度信号直接进行积分会出现干扰趋势项，需要拟合趋势项以去除信号偏移，并且因为安装要求无法准确测量悬臂梁的加速度，所以通过测量位移信号，采用 7 数值点微分公式进行数值微分，完成回复力曲面的绘制。因为本节通过一个线性微分方程对传统的回复力曲面法进行验证，对回复力曲面做了处理，将速度和位移线性映射到 $[-1,1]$ 区域，能更加直观对比。对于多稳态系统，将曲面投影至 xoy 坐标无法直观地看出系统的非线性特性，所以将直接在三维空间表征 RFS。

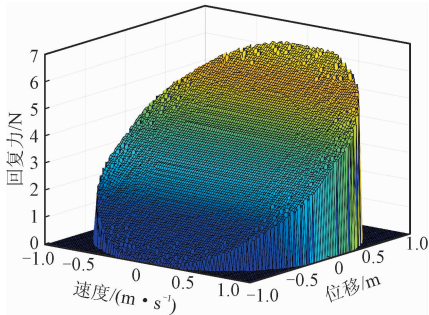


图 7 时域数值微分下得到的回复力曲面

Fig. 7 The restoring force surface obtained by numerical differentiation in time domain

3 仿真分析

根据第 2 节原理，构造出 4 种不同类型的负刚度悬臂梁。对 4 种类型多稳态振子进行仿真研究，分析刚度回复力和阻尼回复力的辨识精度。表 1 列出了 4 种不同类型的振子的参数。

根据上文需给出梁的等效刚度 K 和非线性磁

力的一阶多项式系数。选取 K 为 112 N/m，非线性刚度系数 k_1 为 $-180 \sim -60$ N/m，如图 8 所示， k_1 可以确定双稳态或三稳态振子的势阱深度。仿真中，考虑了对称双稳态和非对称双稳态悬臂梁的 $k_1 = -120$ N/m，对称三稳态和非对称三稳态悬臂梁的 $k_1 = -100$ N/m，悬臂梁的等效质量 M 和黏滞阻尼 C 分别为 0.006 kg 和 0.01 N · s/m。

表 1 4 种不同类型负刚度悬臂梁的参数

Table 1 The parameters of four different types of negative stiffness oscillators

类型	NRF 方程	稳态位置/mm
对称双稳态	$f_{\text{non}} = (K + k_1)u + k_3u^3$	8, 0, 8
不对称双稳态	$f_{\text{non}} = (K + k_1)u + k_2u^2 + k_3u^3$	-8, 0, 6
对称三稳态	$f_{\text{non}} = (K + k_1)u + k_3u^3 + k_5u^5$	-15, 8, 0, 8, 15
不对称三稳态	$f_{\text{non}} = (K + k_1)u + k_2u^2 + k_3u^3 + k_4u^4 + k_5u^5$	-14, -8, 0, 8, 16

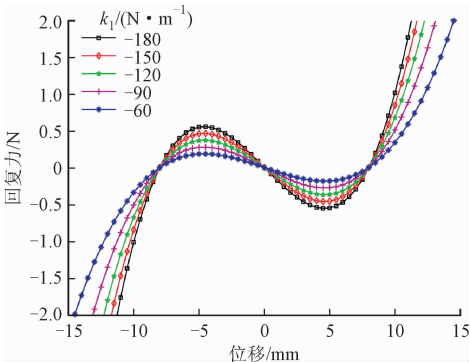
表 2 为依据稳态点和主刚度项系数构造的 4 种类型的 NRF 方程。

表 2 4 种类型的 NRF 方程

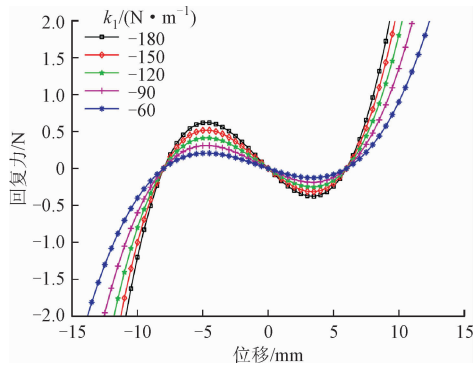
Table 2 Numerical simulation equations of NRF

类型	NRF 方程
对称双稳态	$f_{\text{non}} = -120u + 1\,875\,000u^3$
不对称双稳态	$f_{\text{non}} = -120u + 5e^3u^2 + 2.5e^6u^3$
对称三稳态	$f_{\text{non}} = 100u - 2e^6u^3 + 6.94e^9u^5$
不对称三稳态	$f_{\text{non}} = 100u - 1.6e^3u^2 - 1.7e^6u^3 + 5.58e^9u^5$

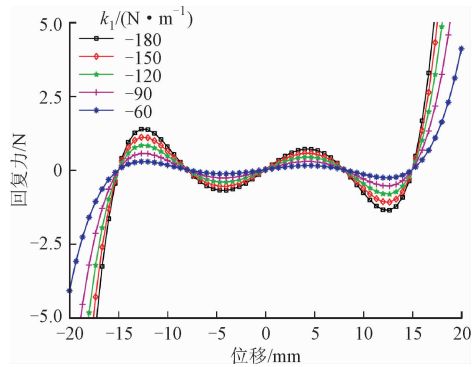
值得注意的是，双稳态和三稳态悬臂梁可以表现为势阱间振荡或势阱内振荡，识别数据集的选择尤为重要。数值算例表明，选择的输出位移信号必须同时包含势阱间振荡和势阱内振荡。本文选取恒激励加速度的扫频信号，保证输入激励力幅值恒定。



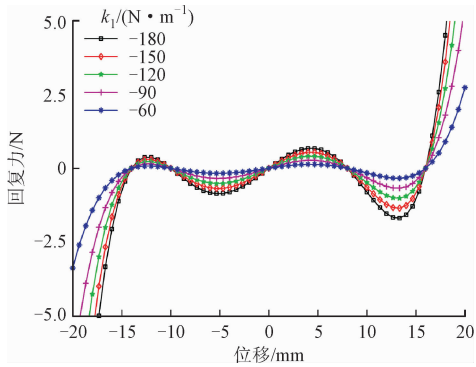
(a) 对称双稳态



(b) 不对称双稳态



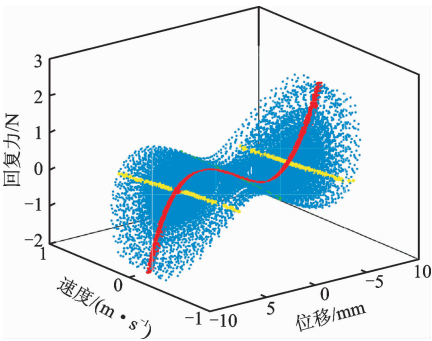
(c) 对称三稳态



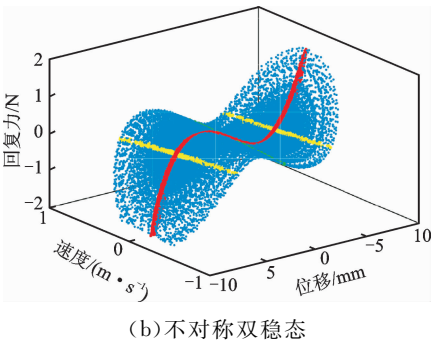
(d) 不对称三稳态

图 8 4 种典型负刚度非线性悬臂梁的回复力曲线
Fig. 8 Restoring force curves of four typical nonlinear oscillators with negative stiffness

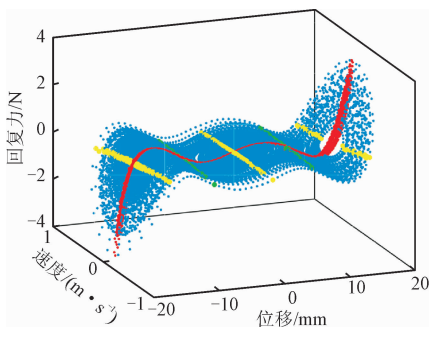
得到悬臂梁的位移,通过微分得到速度和加速度,构造出力、速度、位移的三维点,用 Grawley-O'Donnell 法将这些点通过插值,绘制成象限上的连续曲面得到 RFS,如图 9 所示。从 RFS 图中能够直观的观测系统的非线性特性及稳态点位置,说明数值微分方法能够可靠地从测量位移中估计到速度和加速度的值,从而完成系统 RFS 的精准绘制。通过截面法得到,系统刚度回复力曲线和阻尼回复力曲线见图 10。从刚度回复力曲线可以看出系统的负刚度稳态特性及其稳态点位置,从阻尼曲线可看出系统的阻



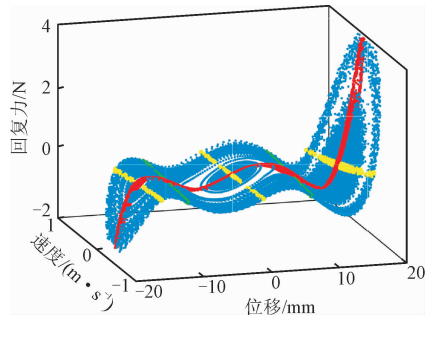
(a) 对称双稳态



(b) 不对称双稳态



(c) 对称三稳态

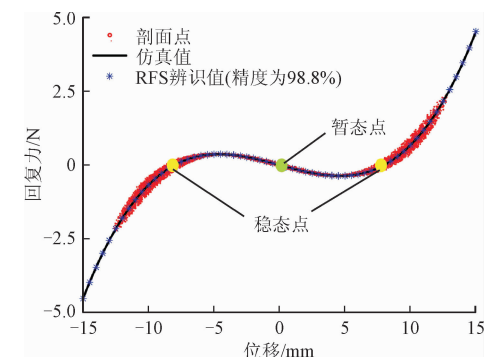


(d) 不对称三稳态

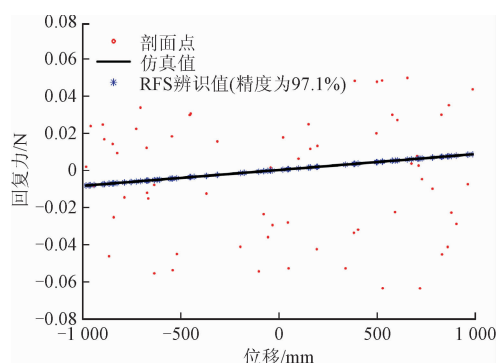
图 9 4 种典型负刚度非线性悬臂梁的回复力曲面
Fig. 9 Restoring force surfaces of four typical negative stiffness nonlinear oscillators

尼是线性的。用最小二乘法对回复力参数进行辨识,结果见表 3,RFS 辨识得到的刚度回复力曲线的辨识精度大于 95%,辨识得到的阻尼回复力曲线的

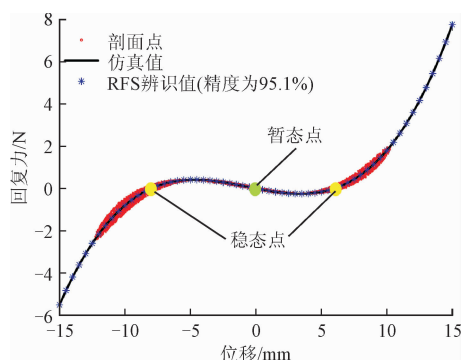
误差不超过5%,辨识结果和仿真值吻合度高,说明回复力曲面法对磁力耦合多稳态非线性悬臂梁系统辨识的精确性和有效性。



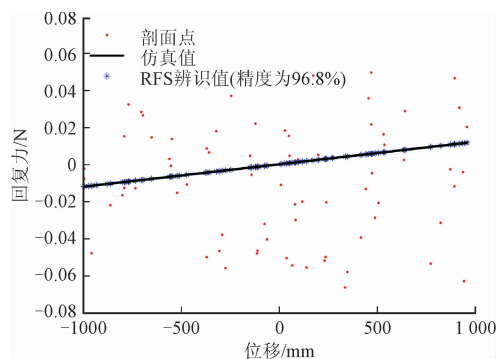
(a) 对称双稳态刚度力曲线



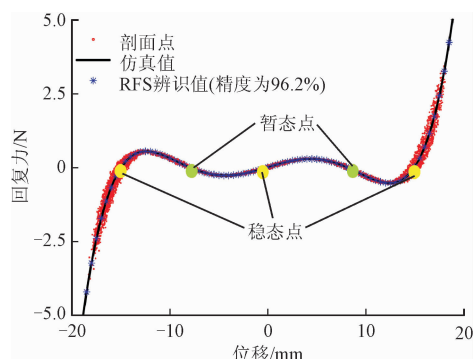
(b) 对称双稳态阻尼力曲线



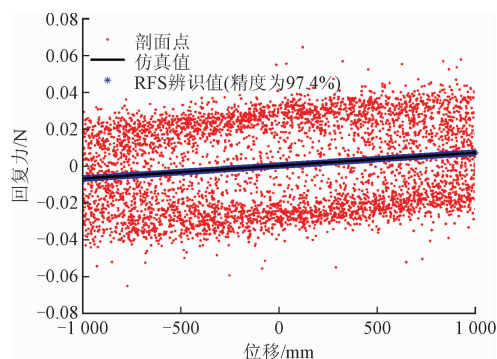
(c) 不对称双稳态刚度力曲线



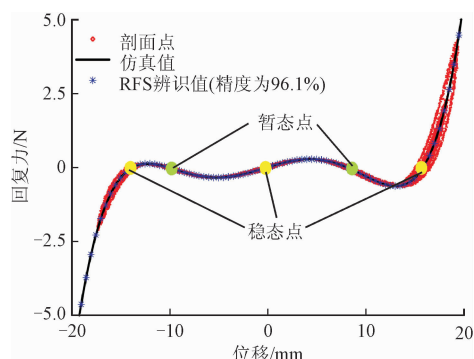
(d) 不对称双稳态阻尼力曲线



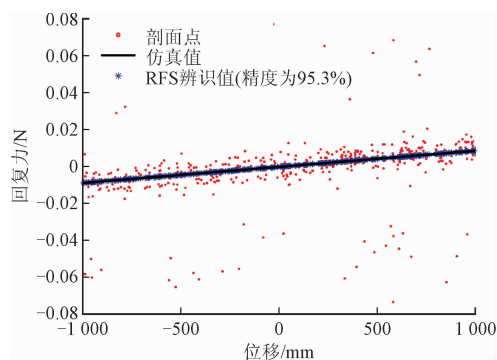
(e) 对称三稳态刚度力曲线



(f) 对称三稳态阻尼力曲线



(g) 不对称三稳态刚度力曲线



(h) 不对称三稳态阻尼力曲线

图 10 4 种典型负刚度非线性悬臂梁辨识得到的回复力曲线
Fig. 10 The restoring force curves obtained from identification of four typical nonlinear oscillators with negative stiffness

表 3 4 种典型负刚度非线性振子回复力参数辨识结果

Table 3 Identification results of restoring force parameters of four typical nonlinear oscillators with negative stiffness

类型	k_5	k_4	k_3	k_2	k_1	k_0	C
对称双稳态			1.9×10^6	-0.003	-119.99	5.4×10^{-5}	10.00×10^{-2}
不对称双稳态			2.5×10^6	$5\ 000$	-120.00	0	9.69×10^{-2}
对称三稳态	6.92×10^9	1.16×10^{-4}	-1.9×10^6	-0.327	99.64	5.4×10^{-5}	9.71×10^{-2}
不对称三稳态	5.57×10^9	1.14×10^{-4}	-1.6×10^6	-16×10^4	99.87	$0.000\ 1$	9.56×10^{-2}

4 实验验证

为验证计算方法和非线性回复力辨识精度,搭建了如图 11 所示的实验系统。系统是由信号发生器(VT-9002-1)和功率放大器(YE5874A)控制的激振器(JZK-50)在恒定频率和扫频激励下建立的。用位移传感器(HL-G112-A-C5)测量悬臂梁响应的绝对位移,用示波器(TBS2000)采集实验数据。由于悬臂梁的内部应力、两个旋转磁铁的不均匀性以及安装条件等原因,很难实现完全对称,因此如果悬臂梁两个稳态点的位置相对于中心位置的误差小于 5%,则视为对称。

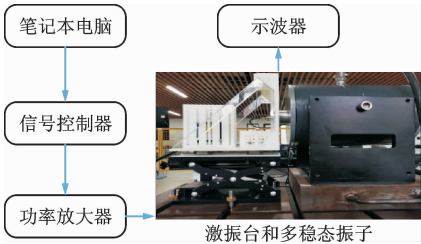


图 11 实验系统组成

Fig. 11 Photograph of the laboratory bench

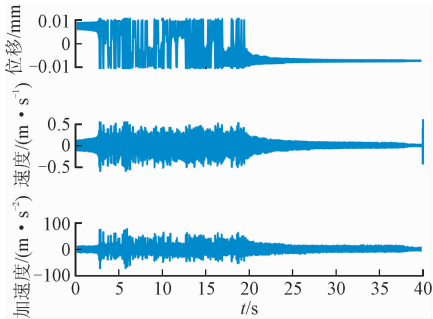
4 种不同类型的多稳态振子的稳态点位置如表 4 所示,它们是通过旋转磁体或改变磁体的相对位移来实现的,此外其他实验参数也列于表 4。

表 4 4 种不同类型的多稳态悬臂梁的实验参数

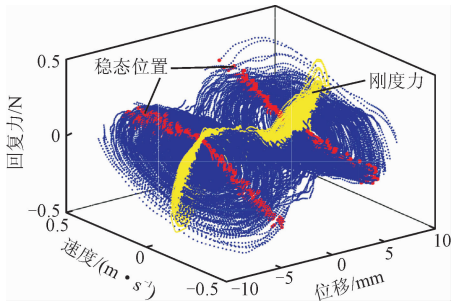
Table 4 Experimental parameters of four different types of multi-steady state oscillators

类型	稳态点 位置/m	扫频幅 值/(m · s ⁻²)	扫频 时间 /s	扫频 范围 /Hz
对称双稳态	-6.92,0,6.94	5.5	40	10~30
不对称双稳态	-7.05,0,4.97	10.0	40	15~35
对称三稳态	-8.76,0,8.87 -4,4,4	5.5	40	10~30
不对称三稳态	-11.29,0,8.60 -5.1,3.7	11.0	40	10~30

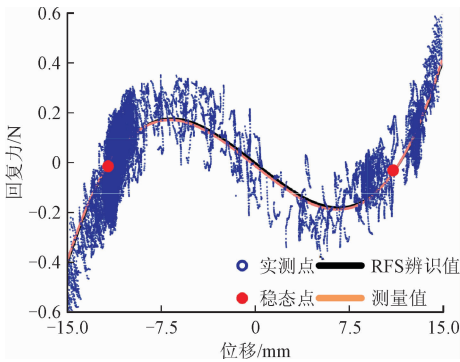
根据第 2 节,RFS 方法可用于系统回复力的辨识,包括刚度回复力和阻尼回复力。因此,对多稳态梁的位移响应进行了测量和处理,包括对采集位移信号的平滑处理和数值微分,以构建 RFS。图 12 显示了对称双稳态悬臂梁系统的实验结果,不对称双稳态系统、对称三稳态系统及不对称三稳态系统实验结果如图 13~15 所示。从中可以看出,回复力曲面法能直观地展示实验数据的非线性特性,其中



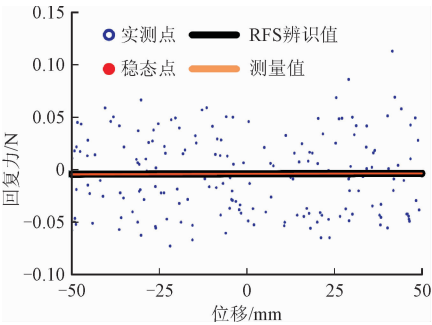
(a)测量位移数值微分结果



(b)回复力曲面



(c)刚度回复力曲线实验值和辨识值对比

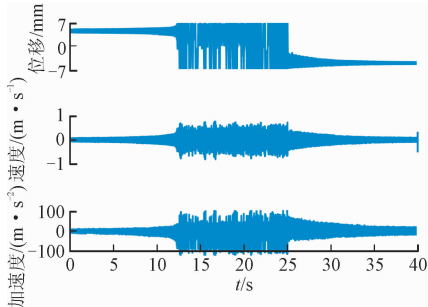


(d) 阻尼回复力曲线实验值和辨识值对比

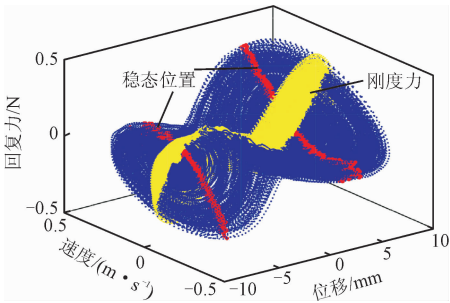
图 12 对称双稳态悬臂梁系统实验结果

Fig. 12 Experimental results of symmetrical bistable cantilever beam system

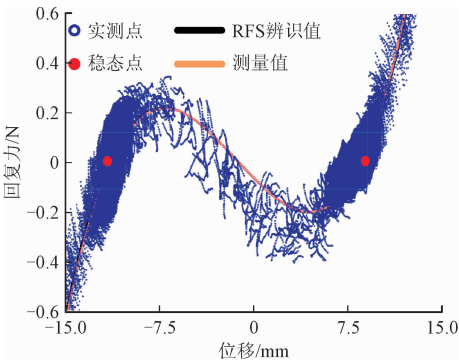
刚度回复力的拟合精度为 97% 以上, 阻尼回复力的拟合精度为 94% 以上, 所以通过刚度和阻尼函数的精确辨识, 能够更加准确地显示系统的非线性特性。通过大量的仿真数据和实验数据集辨识结果可知,



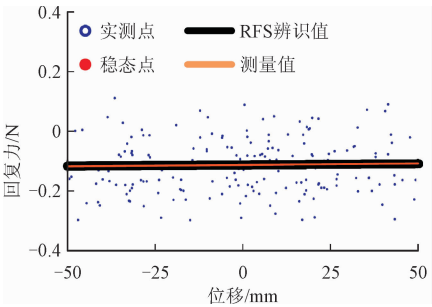
(a) 测量位移数值微分结果



(b) 回复力曲面



(c) 刚度回复力曲线实验值和辨识值对比

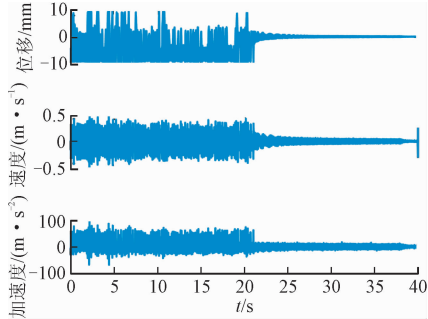


(d) 阻尼回复力曲线实验值和辨识值对比

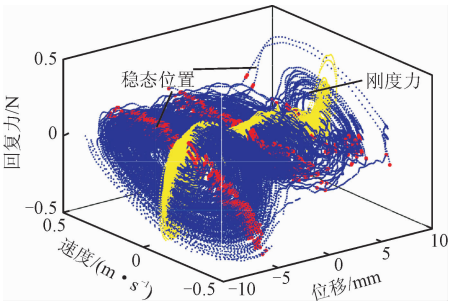
图 13 不对称双稳态悬臂梁系统实验结果

Fig. 13 Experimental results of asymmetric bistable cantilever beam system

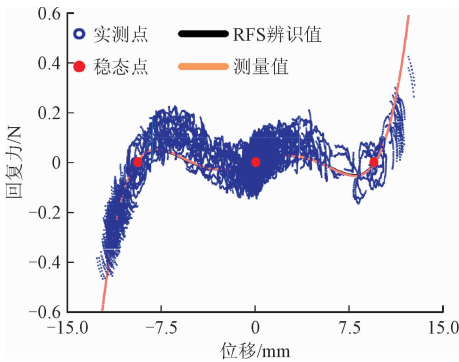
RFS 的辨识精度很大程度上取决于数据的前处理。总之, 辨识出的 NRF 与测量的 RFS 有很好的一致性, 验证了 RFS 法对辨识负刚度非线性振子的有效性和准确性。



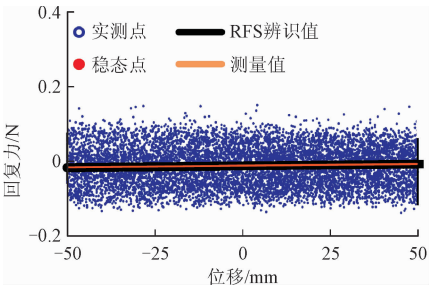
(a) 测量位移数值微分结果



(b) 回复力曲面



(c) 刚度回复力曲线实验值和辨识值对比

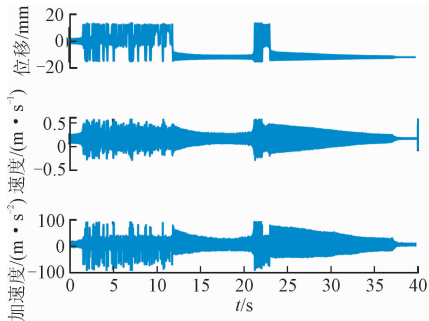


(d) 阻尼回复力曲线实验值和辨识值对比
图 14 对称三稳态悬臂梁系统实验结果

Fig. 14 Experimental results of symmetrical tristable cantilever beam system

5 结 论

(1)对比分析了位移微分和加速度积分的数值处理方法,数值模拟结果表明,对时域数值积分进行



(d) 阻尼回复力曲线实验值和辨识值对比
图 15 不对称三稳态悬臂梁系统实验结果

Fig. 15 Experimental results of asymmetric tristable cantilever beam system

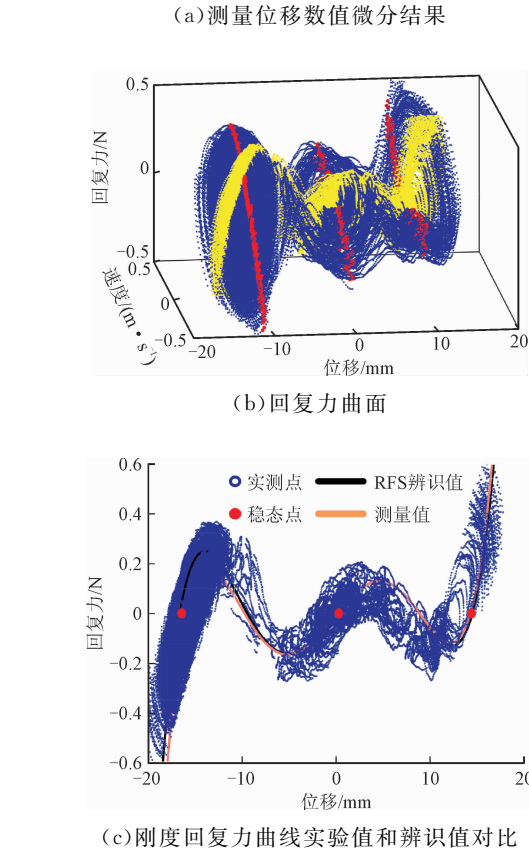
趋势项去除后的精度能达到 93% 以上,对时域数值微分的精度能达到 99% 以上。所以,微分处理办法比积分处理办法更好,对位移数据的微分处理精度可达 99%。

(2)基于 RFS 法的非参数辨识方法,辨识得磁耦合多稳态悬臂梁系统,数值模拟结果表明,通过对数据集中加入 40、20 和 10 dB 的高斯白噪声,在不同势阱下,刚度回复力和阻尼回复力的辨识精度都能保证 95% 以上。

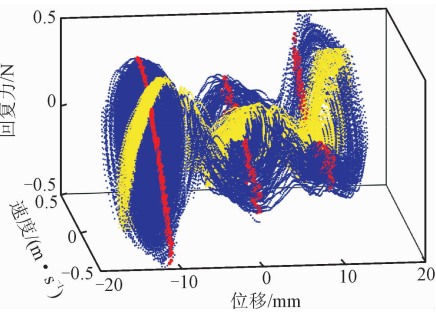
(3)实验结果表明,识别结果与实测回复力面吻合很好,依据最小二乘法,在不同势阱下的刚度回复力拟合精度能保证在 97% 以上,阻尼回复力辨识精度能保证在 94% 以上,证明了回复力曲面法对辨识负刚度非线性振子的有效性和准确性。

(4)通过 RFS 法对实测数据进行绘制得到的三维回复力曲面,能够直观地看到系统的非线性特性及稳态位置。本文是 RFS 法在负刚度及多稳态非线性系统中的首次应用。

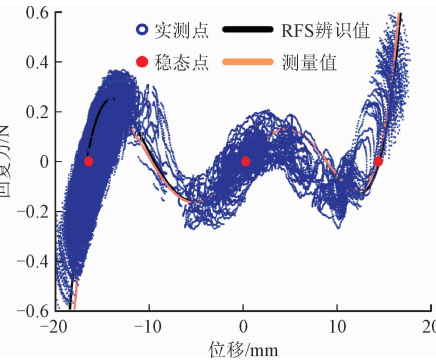
(5)负刚度结构的发展提高了能量俘获或振动控制能力,回复力曲面法可以将非线性回复力精准的表征出来,此研究结果为能量俘获及振动控制领域的非线性研究提供了一种可行的方法。



(a) 测量位移数值微分结果



(b) 回复力曲面



(c) 刚度回复力曲线实验值和辨识值对比

参考文献:

[1] HARNE R L, WANG K W. Harnessing bistable structural dynamics [M]. Chichester, UK: John Wiley & Sons Ltd., 2017: 181-290.
[2] STANTON S C, MCGEHEE C C, MANN B P. Non-linear dynamics for broadband energy harvesting: investigation of a bistable piezoelectric inertial generator [J]. Physica: D Nonlinear Phenomena, 2010, 239 (10): 640-653.
[3] ZHU Pei, REN Xingmin, QIN Weiyang, et al. Improving energy harvesting in a tri-stable piezomagne-

- toelastic beam with two attractive external magnets subjected to random excitation [J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2017, 87(1): 45-57.
- [4] 周生喜, 曹军义, ERTURK A, 等. 压电磁耦合振动能量俘获系统的非线性模型研究 [J]. *西安交通大学学报*, 2014, 48(1): 106-111.
ZHOU Shengxi, CAO Junyi, ERTURK A, et al. Nonlinear model for piezoelectric energy harvester with magnetic coupling [J]. *Journal of Xi'an Jiaotong University*, 2014, 48(1): 106-111.
- [5] CAO Junyi, ZHOU Shengxi, INMAN D J, et al. Nonlinear dynamic characteristics of variable inclination magnetically coupled piezoelectric energy harvesters [J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2015, 137(2): 021015.
- [6] ZHOU Zhiyong, QIN Weiyang, ZHU Pei. Improve efficiency of harvesting random energy by snap-through in a quad-stable harvester [J]. *Sensors and Actuators: A Physical*, 2016, 243: 151-158.
- [7] NAMMARI A, CASKEY L, NEGRETE J, et al. Fabrication and characterization of non-resonant magneto-mechanical low-frequency vibration energy harvester [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2018, 102: 298-311.
- [8] MALATKAR P, NAYFEH A H. A plethora of nonlinear dynamics phenomena observed in a simple cantilever plate [C]// *Proceedings of ASME 2003 International Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference*. New York, USA: ASME, 2008: 2603-2610.
- [9] VAKAKIS A F, EWINS D J. Effects of weak non-linearities on modal analysis [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1994, 8(2): 175-198.
- [10] CHATTERJEE A, VYAS N S. Stiffness non-linearity classification through structured response component analysis using Volterra series [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2001, 15(2): 323-336.
- [11] BENDAT J S, PALO P A, COPPOLINO R N. A general identification technique for nonlinear differential equations of motion [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1992, 7(1): 43-61.
- [12] GONDHALEKAR A C, PETROV E P, IMREGUN M. Parameters identification for nonlinear dynamic systems via genetic algorithm optimization [J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2009, 4(4): 041002.
- [13] MARCHESIELLO S, GARIBALDI L. A time domain approach for identifying nonlinear vibrating structures by subspace methods [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2008, 22(1): 81-101.
- [14] ANASTASIO D, FASANA A, GARIBALDI L, et al. Nonlinear dynamics of a Duffing-like negative stiffness oscillator: modeling and experimental characterization [J]. *Shock and Vibration*, 2020, 2020: 1-13.
- [15] FELDMAN M. Nonparametric identification of asymmetric nonlinear vibration systems with the Hilbert transform [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2012, 331(14): 3386-3396.
- [16] COHEN N, BUCHER I, FELDMAN M. Slow-fast response decomposition of a bi-stable energy harvester [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2012, 31: 29-39.
- [17] MASRI S F, CAUGHEY T K. A nonparametric identification technique for nonlinear dynamic problems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1979, 46(2): 433-447.
- [18] MASRI S F, SASSI H, CAUGHEY T K. Nonparametric identification of nearly arbitrary nonlinear systems [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1982, 49(3): 619-628.
- [19] CRAWLEY E F, O'DONNELL K J. Force-state mapping identification of nonlinear joints [J]. *AIAA Journal*, 1987, 25(7): 1003-1010.
- [20] KERSCHEN G, LENAERTS V, GOLINVAL J C. VTT benchmark: application of the restoring force surface method [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2003, 17(1): 189-193.
- [21] SUN W, LI X. Nonlinear joint parameter identification for bolted beam structure [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2013, 26(2): 26-28.
- [22] ANASTASIO D, MARCHESIELLO S. Experimental characterization of friction in a negative stiffness nonlinear oscillator [J]. *Vibration*, 2020, 3(2): 132-148.
- [23] KERSCHEN G, GOLINVAL J C, WORDEN K. Theoretical and experimental identification of a nonlinear beam [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 244(4): 597-613.
- [24] WORDEN K. Data processing and experiment design for the restoring force surface method: part I Integration and differentiation of measured time data [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1990, 4(4): 295-319.
- [25] JIANG H, CHEN Q. Application of restoring force surface method in particle damper research [J]. *Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis*, 2007, 27(3): 228-231.

(编辑 杜秀杰)